20/11/18

Είδαμε μέχρι τώρα την έννοια του ορίου και της συνέχειας πραγματικών συναρτήσεων (πολλών μεταβλητών)

Όρια και συνέχεια διανυσματικών συναρτήσεων

Ορισμός Έστω $U \subset \mathbb{R}^n$. $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $\bar{x_0}$ σ.σ. του U και $\bar{\ell} \in \mathbb{R}^m$. Τότε λέμε ότι η $\bar{f}$ συγκλίνει στο $\bar{\ell}$, στο σημείο $\bar{x_0}$, αν $\forall (\bar{x_\nu}) \subset U \setminus \{\bar{x_0}\}$ με $\boxed{\bar{x_\nu} \to \bar{x_0}} \Rightarrow \boxed{\bar{f}(\bar{x_\nu}) \to \bar{\ell}}$

ακολουθία στον $\mathbb{R}^n$ — ακολουθία στον $\mathbb{R}^m$

[Για $m=1$ έχουμε την ειδική περίπτωση $f: U \to \mathbb{R}$ και για $n=m=1$, την ειδική περίπτωση $f: U \to \mathbb{R}$, με $U \subseteq \mathbb{R}$]

Αποδεικνύουμε ότι το όριο ℓ αν υπάρχει, είναι μοναδικό [ΑΣΚΗΣΗ]

ΠΡΟΤΑΣΗ ① Με τις υποθέσεις του ορισμού.

Έστω:

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m.$$

και:

$$\bar{\ell} = \begin{pmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m, \text{ τότε: } \lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\ell} \Leftrightarrow \forall j = 1, \dots m$$

$\Leftrightarrow$ (η $\bar{f}$ συγκλίνει στο $\bar{\ell}$, στο σημείο $\bar{x_0}$)

$$\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} f_j(\bar{x}) = \ell_j$$

Θα πρέπει να ελέγχουμε εάν οι συνιστώσες μιας διανυσματικής συνάρτησης (που είναι πραγματικές) έχουν όριο το l_j

<<ΑΠΟΔΕΙΞΗ>>: $\lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{l} \overset{\text{ορ}}{\iff} \forall (\bar{x_\nu}) \subset U$ έχουμε

$\bar{x_\nu} \to \bar{x_0}$, $\bar{f}(\bar{x_\nu}) \to \bar{l}$ (στο $\mathbb{R}^m$) $\iff$ ακολουθία = που σημαίνει ότι κάθε συντεταγμένη της $f_j(\bar{x_\nu}) = l_j \iff \forall j=1,\dots,m$ $\forall (\bar{x_\nu}) \subset U \setminus \{\bar{x_0}\}$ με $\bar{x_\nu} \to \bar{x_0}$: $f_j(\bar{x_\nu}) \to l_j \overset{\text{ορ}}{\iff} \lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}} f_j(\bar{x}) = l_j$

Πρόταση (2) Με τις υποθέσεις του ορισμού ισχύει: $\lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{l} \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0$

$\forall \bar{x} \in U \setminus \{\bar{x_0}\} \cap B(\bar{x_0}, \delta)$: $\| \bar{f}(\bar{x}) - \bar{l} \| < \varepsilon$

Απόδειξη: $\lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}} f(\bar{x}) = l \underset{\text{προτ (1)}}{\iff} \forall j=1,\dots,m$

$\lim_{\bar{x}\to\bar{x_0}} f_j(\bar{x}) = l_j \iff \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall \bar{x} \in U\setminus\{\bar{x_0}\} \cap B(\bar{x_0},\delta)$: $| f_j(\bar{x}) - l_j | < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\forall \bar{x} \in U \setminus \{\bar{x_0}\} \cap B(\bar{x_0}, \delta)}$ $\boxed{| f_j(\bar{x}) - l_j | < \varepsilon}$

$\boxed{\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_m\}}$

$\Rightarrow \forall \bar{x} \in U \setminus \{\bar{x_0}\} \cap B(\bar{x_0}, \delta)$

$\| f(\bar{x}) - l \| < \sqrt{m} \cdot \varepsilon$

το αντίστροφο: [$\Leftarrow$ Αφού $|f_j(\bar{x}) - \ell_j| \le \|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{\ell}\|$]

<u>Πρόταση ③</u>: Με τις υποθέσεις ορισμού:

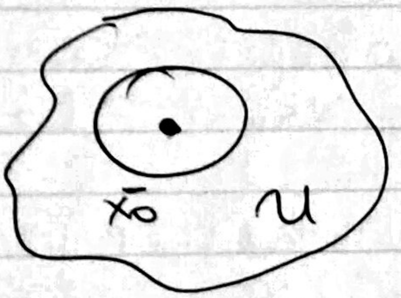
$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\ell} \iff \lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \|\bar{f}(x) - \bar{\ell}\| = 0$$

Ένας τελευταίος, πολύ χρήσιμος χαρακτηρισμός του ορίου είναι ο εξής:

<u>Πρόταση ④</u>: Έστω $U \in \mathbb{R}^n$ και $\bar{x}_0 \in U$, τότε:

$$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} f(\bar{x}) = \bar{\ell} \iff \lim_{\bar{u}\to\bar{0}} f(\bar{x}+\bar{u}) = \ell$$

<u>Απόδειξη</u>:



$\bar{x}_0 \in \mathring{U} \Rightarrow B(\bar{x}_0, \delta) \subset \mathring{U} \subset U$
$\exists\, \delta > 0$

τότε: $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta) \iff \|\underbrace{\bar{x} - \bar{x}_0}_{=:u}\| < \delta \iff \bar{u} \in B(\bar{0}, \delta)$

Θεωρώ τη συνάρτηση $\bar{u} \mapsto \bar{f}(\bar{x}_0 + \bar{u})$, $\bar{u} \in B(\bar{0}, \delta)$

$\lim_{\bar{x}\to\bar{x}_0} \bar{f}(\bar{x}) = \bar{\ell} \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists\ 0 < \delta_0 < \delta \ \ \forall \bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta_0) \setminus \{\bar{x}_0\}$

$\|\bar{f}(\bar{x}) - \bar{\ell}\| < \varepsilon$.

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_0 > 0 \ \forall \bar{u} \in B(\bar{0}, \delta_0) \setminus \{\bar{0}\}$ να ισχύει:
$\|f(\bar{x}_0 + \bar{u}) - \ell\| < \varepsilon$
[αφού $\bar{x} \in B(\bar{x}_0, \delta_0) \setminus \{\bar{x}_0\} \iff \bar{u} \in B(\bar{0}, \delta_0) \setminus \{\bar{0}\} \iff$
$\iff 0 < \|\underbrace{\bar{x} - \bar{x}_0}_{=u}\| < \delta_0$

Ορισμός: Η $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται

(1) συνεχής στο $\bar{x_0} \in U$ αν $\forall$ $(\bar{x_\nu}) \subset U$ με $\bar{x_\nu} \to \bar{x_0}$
$f(\bar{x_\nu}) \to f(\bar{x_0})$, $\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} f(\bar{x}) = f(\bar{x_0})$ αν $\bar{x_0}$ σημείο σ.σ. του U
(π.χ εσωτ. σημείο του U))

(2) συνεχής στο $A \subset U$ αν συνεχής σε κάθε $\bar{x_0} \in A \subset U$
(μέσα στο U)

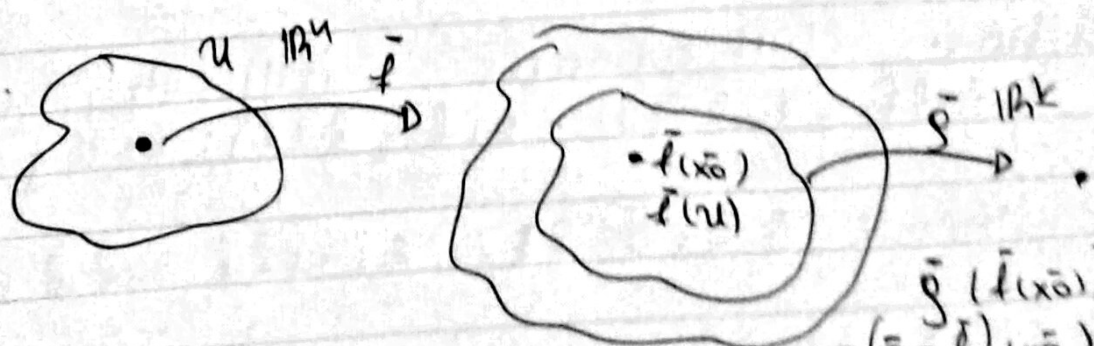
(3) συνεχής, συνεχής στο U

Θεώρημα: Με τις «γνωστές» υποθέσεις
$\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} f(\bar{x}) = \bar{l}$, $\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} \bar{g}(\bar{x}) = \bar{p} \Rightarrow \lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} (\bar{f} + \bar{g})(\bar{x}) =$
$= \bar{l} + \bar{p}$ και $a \in \mathbb{R}$: $\lim_{\bar{x} \to \bar{x_0}} (a\bar{f})(\bar{x}) = a \cdot \bar{l}$

Αντίστοιχα, $\bar{f}, \bar{g}$ συνεχείς στο $\bar{x_0}$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow a\bar{f} + b \cdot \bar{g}$ συνεχείς στο $\bar{x_0}$ $(a, b \in \mathbb{R})$

Επίσης, Αν $\bar{f}: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $\bar{x_0} \in U$ συνεχής στο x_0 ~~[illegible]~~ και $\bar{g}: V \to \mathbb{R}^k$ με $\bar{f}(U) \subset V$ συνεχής στο $\bar{f}(\bar{x_0})$, τότε: $\bar{g} \circ \bar{f}: U \to \mathbb{R}^k$ είναι συνεχής στο $\bar{x_0}$ (ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ ΣΥΝΘΕΣΗ)

Απόδειξη:



$\bar{g}(\bar{f}(\bar{x_0})) =$
$= (\bar{g} \circ \bar{f})(\bar{x_0})$

$\Rightarrow$

Έστω $(\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{x}_\nu \to \bar{x}_0 \Rightarrow \bar{f}(\bar{x}_\nu) \to \bar{f}(\bar{x}_0)$

$[\forall (\bar{y}_\nu) \subset V$ με $\bar{y}_\nu \to \bar{y}_0 : \bar{g}(\bar{y}_\nu) \to \bar{g}(\bar{y}_0)] \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}_\nu)) \to \bar{g}(\bar{f}(\bar{x}_0))$

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\bar{f} = U \to \mathbb{R}^m$ συνεχής με $U \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές. Τότε $\bar{f}(U)$ συμπαγές. Ειδικότερα, για $m=1$, η ~~...~~ $f : U \to \mathbb{R}$ λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο, τα $\underset{\min}{\max} f = \underset{\min}{\max} f(U) = \underset{\min}{\max}\{f(\bar{x}) \mid \bar{x} \in U\}$

δηλ., $\exists\, x_{min}, x_{max} \in U :\ \min f = f(\bar{x}_{min}) \leq$
$\leq f(\bar{x}) \leq f(\bar{x}_{max}) = \max f$

<u>Απόδειξη</u>: Έστω $(\bar{y}_\nu) \subset \bar{f}(U)$.

$\Leftrightarrow \exists (\bar{x}_\nu) \subset U$ με $\bar{f}(\bar{x}_\nu) = \bar{y}_\nu \overset{\text{Ναμπ.}}{\Rightarrow} \exists (\bar{x}_{k\nu}) \subset (\bar{x}_\nu)$
και $\bar{x}_0 \in U :\ \bar{x}_{k\nu} \to \bar{x}_0 \overset{\text{f συνεχής}}{\Rightarrow} \underbrace{\bar{f}(\bar{x}_{k\nu})}_{=\bar{y}_{k\nu}} \to \underbrace{\bar{f}(\bar{x}_0)}_{\in \bar{f}(U)}$

<u>Απόδειξη</u> (του ότι αν η f πραγματική λαμβάνει μέγιστο και ελάχιστο)

$f(U) \subset \mathbb{R}$ συμπαγές Θ.ν.δ.ο $\exists\, \bar{x}_{min} \in U : f(\bar{x}_{min}) \leq f(\bar{x})$
$\forall \bar{x} \in U$.

Πράγματι, $f(U)$ συμπαγές $\Rightarrow f(U) \subset \mathbb{R}$ φραγμένο
$\Rightarrow \exists \inf f = \inf f(U) = \inf\{f(\bar{x}) : \bar{x} \in U\}$

δηλ., $\forall \nu \in \mathbb{N}\ \exists\, \bar{x}_\nu \in U : f(\bar{x}_\nu) \in [\inf f, \inf f + \frac{1}{\nu}] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\bar{x}_\nu) \to \inf f$

$\Rightarrow$

$f(\mathcal{U})$ κλειστό $\inf f \in f(\mathcal{U}) \Rightarrow \exists\ \bar{x}_{min} \in \mathcal{U}$

$f(\bar{x}_{min}) = \inf f = \min f$.

$\min A = \inf A$, αν $\inf A \subset A$

(π.χ.) $A = [0,1] \Rightarrow \inf A = \min A$

$A = (0,1]$ $\inf A$ και $\nexists \min A$

$\boxed{\text{ΑΣΚΗΣΕΙΣ}}$ (33, 34, 35, 36, 37)

(3α) Δ.Ο. κάθε ομοπαραλληλική (αφινική) απεικόνιση από το $\mathbb{R}^n$ στον $\mathbb{R}^m$ είναι συνεχής

Λύση: $\bar{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\bar{f}(\bar{x}) = A\bar{x} + \bar{b}$

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ (πίνακας με m γραμμές και n στήλες)

$b \in \mathbb{R}^m$

[$\bar{b} = \bar{0}$, $\bar{f}$ λέγεται γραμμική]

$$\bar{f}(\bar{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\bar{x}) \\ \vdots \\ f_m(\bar{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$$

συνεχής $\forall \bar{x}_0 \in \mathbb{R}^n \Leftrightarrow \forall i = 1, \ldots, n$, f_i συνεχής στο $\bar{x}_0$

Διαφορισιμότητα (= Παραγωγισιμότητα)

Έστω $f: U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, $\boxed{U \text{ ανοιχτό}}$ $\Rightarrow$ κάθε $\bar{x} \in U$ είναι εσωτ. σημείο (δηλ. σ.σ.)

$\boxed{n \geq 2}$ Η f λέγεται μερικώς διαφορίσιμη (partial differentiable) ως προς [την i-μεταβλητή] στο σημείο $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n) \in U$, αν ($\bar{x} = (x_1, \dots, x_n)$: $x_i = i$-μτβ) $\exists$ η μερική παράγωγος της f ως προς το x_i στο a, $\frac{\partial f(\bar{a})}{\partial x_i} = \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{a} + h\bar{e}_i) - f(\bar{a})}{h} =$

$= \lim_{h \to 0} f(a_1, \dots, a_i + h, \dots, a_n) - f(\bar{a})$

Δηλαδή, αν $f_i : h \mapsto f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + h, a_i + h, \dots, a_n) \in \mathbb{R}$

: $\frac{\partial f'}{\partial x_i}(\bar{a}) = \frac{d}{dh} f_i(\bar{a}) = f_i(0)$

Δηλαδή, είναι η παράγωγος της συν/σης που προκύπτει εάν όλες οι συντεταγμένες είναι σταθερές ($= a_j$ για $j \neq i$) και ~~..~~ παραγωγίζω μόνο ως προς την i-μεταβλητή στο σημείο a_i.

~~$\partial f(x_0, y_0)$~~ $\Rightarrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ με $f(x,y) = xy$ =

$= \frac{d}{dx}(x y_0) = y$